Corso di Algebra lineare (e geometria) - a.a. 2010-2011

Esercizi 12

1. Sia $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^4$, e sia $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ lapplicazione lineare tale che $T(e_1) = e_1$, $T(e_2) = 0$, $T(e_3) = e_2$, $T(e_4) = e_3$
   (a) Scrivere la matrice A che rappresenta T rispetto alla base canonica.
   (b) Determinare la dimensione dell'immagine di T e una base del nucleo di T.
   (c) Scrivere la matrice che rappresenta $T^2 = T \circ T$ rispetto alla base canonica.
   (d) Determinare la dimensione dellimmagine di T^2 e una base del nucleo di T^2.
   (e) Determinare la dimensione dellimmagine di T^n e una base del nucleo di T^n, per ogni $n \geq 3$.

2. Sia H il piano di $\mathbb{R}^3$ di equazione $3x - y + z = 0$. Scrivere il vettore
$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$
   come somma di un vettore di H e di un vettore perpendicolare ad H.

3. Si consideri la matrice
$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
   (a) posto $V_1 = \ker(A - I)$ e $V_{-1} = \ker(A + I)$, determinare una base di V_1 e una base di V_{-1}, e verificare che $\dim V_1 + \dim V_{-1} = 4$;
   (b) qual è il polinomio caratteristico di A? (suggerimento: utilizzare il punto precedente);
   (c) determinare se possibile una matrice ortogonale Q e una matrice diagonale D tali che ${}^tQAQ = D$.

4. In questo esercizio, $\mathbb{M}$ denota lo spazio vettoriale delle matrici $n \times n$ a elementi reali.
   (a) linsieme delle matrici simmetriche di ordine n è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{M}$? linsieme delle matrici ortogonali è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{M}$? Giustificare la risposta;
   (b) mostrare che, se w è un vettore non nullo di $\mathbb{R}^n$, la matrice $Q = I - \frac{2}{{}^tww} w\, {}^tw$ è una matrice $n \times n$ ortogonale e simmetrica;
   (c) scrivere la matrice Q del punto precedente quando $n = 3$ e w è un vettore perpendicolare al sottospazio di equazione $x_1 - x_2 + x_3 = 0$.

5. In questo esercizio tutte le matrici hanno come elementi dei numeri reali.
   (a) Mostrare che gli autovalori di una matrice ortogonale hanno modulo uno.
   (b) Mostrare che, se λ è un autovalore di una matrice ortogonale simmetrica, allora $\lambda = 1$ oppure $\lambda = -1$.
   (c) Sia A una matrice ortogonale simmetrica di ordine n, e siano $V_1 = \ker(A - I)$ e $V_{-1} = \ker(A + I)$. Siano P_1 e P_2 le matrici delle proiezioni ortogonali su V_1 e su V_{-1}. Spiegare perché valgono le uguaglianze $I = P_1 + P_2$ e $A = P_1 - P_2 = I - 2P_2$.