Corso di Algebra lineare (e geometria) - a.a. 2010-2011

Esercizi 11

1. Si supponga che una matrice quadrata A di ordine 3 abbia autovalori 0, -2 e 4 con rispettivi autovettori u, v e w.
   (a) I tre autovettori u, v e w sono linearmente indipendenti?
   (b) Determinare una base del nucleo e una base dello spazio generato delle colonne di A.
   (c) Determinare tutte le soluzioni dell'equazione $Ax = 3v - 5w$.
   (d) Mostrare che l'equazione $Ax = u$ non ha soluzioni.

2. Siano A, B matrici quadrate di ordine n.
   (a) verificare che AB e BA hanno gli stessi autovalori;
   (b) verificare che, se B è invertibile, AB e BA sono simili;
   (c) trovare due matrici quadrate A e B tali che AB e BA non siano simili.

3. Dati i vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} , \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   (a) Quante sono le matrici ortogonali di ordine 3 la cui prima colonna è un multiplo di v_1 e la cui seconda colonna è un multiplo di v_2?
   (b) Determinare una matrice ortogonale Q di ordine 3 la cui prima colonna è un multiplo di v_1 e la cui seconda colonna è un multiplo di v_2. Le righe di Q formano una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$?

4. Si considerino:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} , \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

   (a) Sotto quali condizioni il sistema $Ax = b$ ha soluzione?
   (b) Determinare una base per $\ker(A)$.
   (c) Quando una soluzione esiste, scrivere tutte le soluzioni del sistema nella forma: soluzione particolare + soluzione del sistema omogeneo associato.
   (d) Trovare una base per lo spazio generato dalle colonne di A.
   (e) Quando il sistema non ammette alcuna soluzione, qual è il rango della matrice completa $(A\ b)$?

5. Sia A una matrice quadrata tale che $A^2 = 0$. Mostrare che $A - I$ e $I + A$ sono invertibili.