Corso di Algebra lineare (e geometria) - a.a. 2010-2011

Esercizi 10

1. Sia V lo spazio vettoriale dei polinomi $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ di grado minore o uguale a 3 a coefficienti reali. Sia $L : V \to \mathbb{R}^3$ la funzione definita da

$$L(p(x)) = \begin{pmatrix} p(0) \\ p(-1) \\ p(2) \end{pmatrix}$$

   (a) Si verifichi che L è lineare.

   (b) Si scelga una base di V e si scriva la matrice che rappresenta L rispetto a tale base di V e alla base canonica di R^3.

   (c) Si determinino una base per il nucleo e una base per l'immagine di L.

   (d) Si determini l'insieme dei polinomi di grado minore o uguale a tre che soddisfano p(z) = z per z = 0, z = -1 e z = 2.

2. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 2 & k \\ 2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

   (a) per quali valori di k il vettore ${}^t(0, 1, 1)$ è un autovettore di A?

   (b) per i valori di k determinati nel punto precedente, si trovino una matrice ortogonale Q e una matrice diagonale D tali che $D = {}^tQAQ$.

   (c) sempre per i valori di k determinati nel punto (a), si scriva il polinomio caratteristico di A^3.

3. Sia H un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$, e sia $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ la funzione che a un vettore $v \in \mathbb{R}^n$ associa la sua proiezione ortogonale sul sottospazio H. Si assuma che H abbia dimensione d. Qual è il polinomio caratteristico della matrice che rappresenta P rispetto alla base canonica?

4. Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & h & 2 \\ k & 1 & 2 \\ h & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   (a) Per quali valori dei parametri reali h, k la matrice A ammette 1 come autovalore?

   (b) In corrispondenza dei valori trovati, discutere quando A è diagonalizzabile e determinare, quando esiste, una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di A.

   (c) Posto $h = 0$, $k = 1$, esiste una matrice ortogonale Q tale che $QA = DQ$, dove

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \ ?$$