Corso di Algebra lineare - a.a. 2011-2012
Prova scritta del 22.02.2012

Compito **A**

Esercizio 1. Sia $Oxyz$ un sistema di riferimento ortonormale in uno spazio euclideo di dimensione 3. Siano in esso P e Q i punti di coordinate rispettivamente $(2,-1,1)$ e $(1,-1,0)$, C il punto di coordinate $(2,2,1)$ e T quello di coordinate $(2,3,-1)$; sia π_1 un piano di cui sappiamo solo che la giacitura è generata dai due vettori ${}^t(2,3,0)$ e ${}^t(0,1,1)$, π_2 il piano di equazione $2x+y-z=2$ e poniamo $v={}^t(5,-3,2)$.

a) Scrivere un'equazione cartesiana per il piano π_3 parallelo a π_1 e passante per P, equazioni cartesiane per la retta r_1 passante per Q e con giacitura generata da v e un'equazione cartresiana per la sfera S con centro nel punto C e raggio $R=4$;

b) trovare un'equazione cartesiana per la retta r_2 passante per T e ortogonale a π_2 e determinare la posizione relativa di π_2 ed S e quella di r_1 ed S;

c) dimostrare che i punti equidistanti da P e T formano un piano e determinarne un'equazione parametrica.

Punti (3+4+3)

Esercizio 2. Si consideri l'applicazione lineare dipendente da un parametro $t\in\mathbb{R}$, $F_t:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, tale che

$F_t(1,1,1)=(2,2,2)$ $F_t(1,1,0)=(10-t,10+t,2)$ $F_t(1+t,-1+t,t)=(3t+2,3t-2,2t)$
$F_t(1,1,1)=(2,2,2)$, $F_t(1,1,0)=(12-t,12+t,4)$ $F_t(1+t,-1+t,t)=(3t+2,3t-2,2t)$
$F_t(1,1,1)=(2,2,2)$, $F_t(1,1,0)=(14-t,14+t,6)$ $F_t(1+t,-1+t,t)=(3t+2,3t-2,2t)$
$F_t(1,1,1)=(2,2,2)$, $F_t(1,1,0)=(16-t,16+t,8)$ $F_t(1+t,-1+t,t)=(3t+2,3t-2,2t)$

1. Trovare la matrice A_t associata ad F_t nelle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$.
2. Dire per quali valore del parametro reale t, A_t è diagonalizzabile sui reali.
3. Calcolare autovalori e autovettori di A_0.
4. Calcolare la segnatura di ${}^tA_1+A_1$.

Punti (4+5+3+3)

Esercizio 3. Sia $A\neq 0$ una matrice reale non nulla di ordine 3, supponiamo che la sua traccia e la traccia di A^2 siano nulle: $tr(A)=tr(A^2)=0$.
Vero o Falso:

1. A può essere antisimmetrica.
2. A non può essere antisimmetrica.
3. A può essere simmetrica.
4. A può essere diagonalizzzabile sui reali.

5. A può avere determinante $= 1$.
6. A non può avere determinante $= 1$.
7. A può essere ortogonale.
8. A non può essere ortogonale.
9. Se il rango di A è 1 allora A è nilpotente.
10. Se il rango di A è 2 allora A è nilpotente.
11. Se il determinante di A è nullo allora A è nilpotente.
12. Se il determinate di A^2 è nullo allora A è nilpotente.

Punti (1+2+2)

Corso di Algebra lineare - a.a. 2009-2010
Prova scritta del 27.09.2010

Compito **B**

Esercizio 1. Sia $Oxyz$ un sistema di riferimento ortonormale in uno spazio euclideo di dimensione 3. Siano in esso P e Q i punti di coordinate rispettivamente $(-1,1,2)$ e $(-1,0,1)$, C il punto di coordinate $(2,1,2)$ e T quello di coordinate $(3,-1,2)$; sia π_1 un piano di cui sappiamo solo che la giacitura è generata dai due vettori ${}^t(3,0,2)$ e ${}^t(1,1,0)$, π_2 il piano di equazione $x-y+2z=1$ e poniamo $v={}^t(-3,2,5)$.

a) Scrivere un'equazione cartesiana per il piano π_3 parallelo a π_1 e passante per P, equazioni cartesiane per la retta r_1 passante per Q e con giacitura generata da v e un'equazione cartesiana per la sfera S con centro nel punto C e raggio $R=2$;

b) trovare un'equazione cartesiana per la retta r_2 passante per T e ortogonale a π_2 e determinare la posizione relativa di π_2 ed S e quella di r_1 ed S;

c) dimostrare che i punti equidistanti da P e T formano un piano e determinarne un'equazione parametrica.

Punti (3+4+3)

Esercizio 2. Si consideri l'applicazione lineare dipendente da un parametro $t \in \mathbb{R}$, $F_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, tale che $F_t(1,1,1) = (2-t, 2-t, 2-t)$, $F_t(1,1,0) = (2, 1-t, 1-t)$, $F_t(t,1,0) = (3t-1, 0, t^2)$.

1. Trovare la matrice A_t associata ad F_t nelle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$.
2. Dire per quali valore del parametro reale t, A_t è diagonalizzabile sui reali.
3. Calcolare autovalori e autovettori di A_1.
4. Calcolare la segnatura di ${}^tA_1 + A_1$.

Punti (4+5+3+3)

Esercizio 3. Siano A e B due matrici quadrate reale simmetriche definite positive di ordine 3, sia I la matrice identica :
Vero o Falso:

1. Il prodotto AB può essere antisimmetrica.
2. Se $A+B-I$ non e' definita positiva allora $AB+BA-I$ non è definita positiva.
3. Se $AB-BA+I$ è sempre invertibile

Punti (1+2+2)