Corso di Algebra lineare - a.a. 2012-2013
Prova scritta del 17.01.2013

Compito **A**

Esercizio 1. Sia $Oxyz$ un sistema di riferimento ortonormale in uno spazio euclideo di dimensione 3. Siano in esso P e C i punti di coordinate rispettivamente $(-1,0,2)$ e $(1,1,3)$; inoltre, poniamo $v_1 = {}^t(2,1,-1)$ e $v_2 = {}^t(3,1,0)$.

1. Scrivere equazioni parametriche per la retta r di equazioni cartesiane
$$\begin{cases} x+3y-z=1 \\ 2x-y=3 \end{cases},$$
un'equazione cartesiana per il piano π passante per P e con giacitura generata da v_1 e v_2 e una per la sfera S con centro nel punto C e passante per il punto Q di coordinate $(-3,-1,1)$;
2. determinare la posizione relativa di π ed S, quella di π ed r e quella di r ed S;
3. calcolare la distanza tra la sfera S e la retta s passante per i punti T_1 e T_2 di coordinate rispettivamente $(6,5,1)$ e $(6,4,2)$.

Punti (3+3+3)

Esercizio 2. Siano A e B le due matrici di ordine 3
$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

1. Trovare una base di $\operatorname{Ker} A$, una di $\operatorname{Im} A$ e una di $\operatorname{Im} B$.
2. Determinare, per queste A e B, quali valgono delle seguenti uguaglianze di sottospazi di $\mathbb{R}^3$ (eventualmente, anche entrambe o nessuna): 1) $\operatorname{Im} A + \operatorname{Im} B = \operatorname{Im}(A+B)$;
2) $\operatorname{Im} A \cap \operatorname{Im} B = \operatorname{Im}(A-B)$.

Punti (3+3)

Esercizio 3. Si consideri l'applicazione lineare dipendente da un parametro $t \in \mathbb{R}$, $F_t : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, tale che $F_t(1,1,0,0) = (1+t,-1-t,0,0)$, $F_t(1,-1,0,0) = (1-t,1-t,0,0)$, $F_t(1,0,1,1) = (2+t,-1,4+t,4-t)$, $F_t(t,0,1,-1) = (2t+1,-t^2-t-1,4-t,-t+4)$.

1. Trovare la matrice A_t associata ad F_t nelle basi canoniche di $\mathbb{R}^4$.
2. Dire per quali valore del parametro reale t, A_t è diagonalizzabile sui reali.
3. Calcolare autovalori e autovettori di A_0.
4. Calcolare la segnatura di ${}^tA_5 + A_5$.

Punti (3+4+3+2)

Esercizio 4. Siano A e B matrici simmetriche reali di ordine 4 invertibili.
Vero o Falso:

1. Se $A^{-1}+B^{-1}$ è definita positiva allora e A ha segnatura (1.3) allora B è definita positiva.
2. Se $A+iB$ è normale $AB = BA$ $(i \in \mathbb{C} : i^2 = -1)$.
3. Se $A+iB$ è unitaria $A+2I$ è definita positiva.

Punti (1+1+1)

Corso di Algebra lineare - a.a. 2012-2013
Prova scritta del 17.01.2013

Compito **B**

Esercizio 1. Sia $Oxyz$ un sistema di riferimento ortonormale in uno spazio euclideo di dimensione 3. Siano in esso P e C i punti di coordinate rispettivamente $(0, 2, -1)$ e $(1, 1, 1)$; inoltre, poniamo $v_1 = {}^t(1, -1, 2)$ e $v_2 = {}^t(1, 0, 3)$.

1. Scrivere equazioni parametriche per la retta r di equazioni cartesiane
$$\begin{cases} 3x - y + z = 1 \\ 2y - z = 3 \end{cases},$$
un'equazione cartesiana per il piano π passante per P e con giacitura generata da v_1 e v_2 e una per la sfera S con centro nel punto C e passante per il punto Q di coordinate $(-1, 3, -3)$;
2. determinare la posizione relativa di π ed S, quella di π ed r e quella di r ed S;
3. calcolare la distanza tra la sfera S e la retta s passante per i punti T_1 e T_2 di coordinate rispettivamente $(6, 2, 1)$ e $(6, 1, 3)$.

Punti (3+3+3)

Esercizio 2. Siano A e B le due matrici di ordine 3
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Trovare una base di $\operatorname{Ker} A$, una di $\operatorname{Im} A$ e una di $\operatorname{Im} B$.
2. Determinare, per queste A e B, quali valgono delle seguenti uguaglianze di sottospazi di $\mathbb{R}^3$ (eventualmente, anche entrambe o nessuna): 1) $\operatorname{Im} A + \operatorname{Im} B = \operatorname{Im}(A + B)$;
2) $\operatorname{Im} A \cap \operatorname{Im} B = \operatorname{Im}(A - B)$.

Punti (3+3)

Esercizio 3. Si consideri l'applicazione lineare dipendente da un parametro $t \in \mathbb{R}$, $F_t : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, tale che $F_t(1, 1, 0, 0) = (1 - t, -1 + t, 0, 0)$, $F_t(1, -1, 0, 0) = (1 + t, 1 + t, 0, 0)$, $F_t(1, 0, 1, 1) = (2 - t, -1, 4 - t, 4 + t)$, $F_t(t, 0, 1, -1) = (-2t + 1, -t^2 + t - 1, 4 + t, t + 4)$.

1. Trovare la matrice A_t associata ad F_t nelle basi canoniche di $\mathbb{R}^4$.
2. Dire per quali valore del parametro reale t, A_t è diagonalizzabile sui reali.
3. Calcolare autovalori e autovettori di A_0.
4. Calcolare la segnatura di ${}^tA_3 + A_3$.

Punti (3+4+3+2)

Esercizio 4. Siano A e B matrici simmetriche reali di ordine 4 invertibili.
Vero o Falso:

1. Se $A^3 + B^3$ è definita positiva allora e A ha segnatura (0.4) allora B è definita positiva.
2. Se $A - iB$ è normale $AB = BA$ $(i \in \mathbb{C} : i^2 = -1)$.
3. Se $A - iB$ è unitaria $A + 2I$ è definita positiva.

Punti (1+1+1)

Corso di Algebra lineare - a.a. 2012-2013
Prova scritta del 17.01.2013

Compito **C**

Esercizio 1. Sia $Oxyz$ un sistema di riferimento ortonormale in uno spazio euclideo di dimensione 3. Siano in esso P e C i punti di coordinate rispettivamente $(-1,0,-2)$ e $(0,2,-1)$; inoltre, poniamo $v_1 = {}^t(2,-1,1)$ e $v_2 = {}^t(3,-1,0)$.

1. Scrivere equazioni parametriche per la retta r di equazioni cartesiane
$$\begin{cases} x - 3y + z = 1 \\ 2x + y = 3 \end{cases},$$
un'equazione cartesiana per il piano π passante per P e con giacitura generata da v_1 e v_2 e una per la sfera S con centro nel punto C e passante per il punto Q di coordinate $(-2,-2,-3)$;
2. determinare la posizione relativa di π ed S, quella di π ed r e quella di r ed S;
3. calcolare la distanza tra la sfera S e la retta s passante per i punti T_1 e T_2 di coordinate rispettivamente $(1,-3,2)$ e $(2,-3,1)$.

Punti (3+3+3)

Esercizio 2. Siano A e B le due matrici di ordine 3
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 \\ -1 & 5 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Trovare una base di $\operatorname{Ker} A$, una di $\operatorname{Im} A$ e una di $\operatorname{Im} B$.
2. Determinare, per queste A e B, quali valgono delle seguenti uguaglianze di sottospazi di $\mathbb{R}^3$ (eventualmente, anche entrambe o nessuna): 1) $\operatorname{Im} A + \operatorname{Im} B = \operatorname{Im}(A+B)$;
2) $\operatorname{Im} A \cap \operatorname{Im} B = \operatorname{Im}(A-B)$.

Punti (3+3)

Esercizio 3. Si consideri l'applicazione lineare dipendente da un parametro $t \in \mathbb{R}$, $F_t : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, tale che $F_t(1,1,0,0) = (1-t,-1+t,0,0)$, $F_t(1,-1,0,0) = (1+t,1+t,0,0)$, $F_t(1,0,1,1) = (2-t,-1,4+t,4-t)$, $F_t(t,0,1,-1) = (-2t+1,-t^2+t-1,4-t,-t+4)$.

1. Trovare la matrice A_t associata ad F_t nelle basi canoniche di $\mathbb{R}^4$.
2. Dire per quali valore del parametro reale t, A_t è diagonalizzabile sui reali.
3. Calcolare autovalori e autovettori di A_0.
4. Calcolare la segnatura di ${}^t\!A_2 + A_2$.

Punti (3+4+3+2)

Esercizio 4. Siano A e B matrici simmetriche reali di ordine 4 invertibili.
Vero o Falso:

1. Se $A^3 + B^{-1}$ è definita positiva allora e A ha segnatura (0.4) allora B è definita positiva.
2. Se $2A - iB$ è normale $AB = BA$ $(i \in \mathbb{C} : i^2 = -1)$.
3. Se $2A - iB$ è unitaria $A + I$ è definita positiva.

Punti (1+1+1)

Corso di Algebra lineare - a.a. 2012-2013
Prova scritta del 17.01.2013

Compito **D**

Esercizio 1. Sia $Oxyz$ un sistema di riferimento ortonormale in uno spazio euclideo di dimensione 3. Siano in esso P e C i punti di coordinate rispettivamente $(0,-2,1)$ e $(2,-1,2)$; inoltre, poniamo $v_1 = {}^t(1,1,-2)$ e $v_2 = {}^t(1,0,-3)$.

1. Scrivere equazioni parametriche per la retta r di equazioni cartesiane
$$\begin{cases} 3x + y - z = 1 \\ -2y + z = 3 \end{cases},$$
un'equazione cartesiana per il piano π passante per P e con giacitura generata da v_1 e v_2 e una per la sfera S con centro nel punto C e passante per il punto Q di coordinate $(-2,-3,0)$;
2. determinare la posizione relativa di π ed S, quella di π ed r e quella di r ed S;
3. calcolare la distanza tra la sfera S e la retta s passante per i punti T_1 e T_2 di coordinate rispettivamente $(-1,4,2)$ e $(-2,4,3)$.

Punti (3+3+3)

Esercizio 2. Siano A e B le due matrici di ordine 3
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Trovare una base di $\operatorname{Ker} A$, una di $\operatorname{Im} A$ e una di $\operatorname{Im} B$.
2. Determinare, per queste A e B, quali valgono delle seguenti uguaglianze di sottospazi di $\mathbb{R}^3$ (eventualmente, anche entrambe o nessuna): 1) $\operatorname{Im} A + \operatorname{Im} B = \operatorname{Im}(A+B)$;
2) $\operatorname{Im} A \cap \operatorname{Im} B = \operatorname{Im}(A-B)$.

Punti (3+3)

Esercizio 3. Si consideri l'applicazione lineare dipendente da un parametro $t \in \mathbb{R}$, $F_t : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, tale che $F_t(1,1,0,0) = (1-t,-1+t,0,0)$, $F_t(1,-1,0,0) = (1+t,1+t,0,0)$, $F_t(1,0,1,1) = (2-t,-1,6+t,6-t)$, $F_t(t,0,1,-1) = (-2t+1,-t^2+t-1,6-t,-t+6)$.

1. Trovare la matrice A_t associata ad F_t nelle basi canoniche di $\mathbb{R}^4$.
2. Dire per quali valore del parametro reale t, A_t è diagonalizzabile sui reali.
3. Calcolare autovalori e autovettori di A_0.
4. Calcolare la segnatura di ${}^tA_1 + A_1$.

Punti (3+4+3+2)

Esercizio 4. Siano A e B matrici simmetriche reali di ordine 4 invertibili.
Vero o Falso:

1. Se $A^{-1} + B^{-1}$ è definita positiva allora e A ha segnatura (2.2) allora B non è definita negativa.
2. Se $2A - 3iB$ è normale $AB = BA$ ($i \in \mathbb{C} : i^2 = -1$).
3. Se $2A - i3B$ è unitaria $A + B + I$ è definita positiva.

Punti (1+1+1)