**Corso di Algebra lineare - a.a. 2012-2012**
*Prova scritta del 15.02.2013*

Compito **A**

**Esercizio 1.** Sia $Oxyz$ un sistema di riferimento ortonormale in uno spazio euclideo di dimensione 3. Siano in esso $P_1$ e $P_2$ i punti di coordinate $(0, 2, 3)$ e $(2, 4, -1)$, $C_1$ e $C_2$ i punti di coordinate $(1, 2, 3)$ e $(-1, 4, -1)$, $Q$ e $T$ i punti di coordinate $(0, 3, 1)$ e $(-1, 1, 2)$; inoltre, poniamo $v = {}^t(2, -1, 1)$.

1. Scrivere equazioni cartesiane per la retta $r$ passante per $P_1$ e $P_2$, per le sfere $S_1$ di centro $C_1$ e raggio $\sqrt{6}$ e $S_2$ di centro $C_2$ e passante per $Q$ e per il piano $\pi$ passante per $T$ e di giacitura ortogonale a $v$.
2. Determinare le posizioni relative tra $r$ e $\pi$, tra $\pi$ e $S_1$ e tra $\pi$ e $S_2$.
3. Trovare le equazioni delle rette tangenti a $S_1$, passanti per $T$ e contenute nel piano $\pi$ (se ci sono).

**Punti (2+2+3) punti**

**Esercizio 2.** Dato il seguente sistema di equazioni in 4 incognite (dipendente da un parametro reale $a$)

$$\begin{cases} z + w = 1 \\ -x + 3y + z + w = 0 \\ x + ay + z = 0 \\ x + 2ay - z = 0 \\ ax - y - w = 0 \end{cases}$$

1. dire se per $a = 0$ il sistema è risolubile e nel caso trovare le soluzioni;
2. dire se per i restanti valori di $a$ il sistema è risolubile e nel caso trovare le soluzioni.

**Punti (3+5)**

**Esercizio 3.** Si consideri l'applicazione lineare dipendente da un parametro $t \in \mathbb{R}$, $F_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, tale che
$F_t(1, 1, 1) = (t, 3t + 3, 2t + 1)$ $F_t(1, -1, 0) = (t, -1, -3 - t)$, $F_t(1, 1, 2) = (t, 4t + 3, 3t - 1)$

1. Trovare la matrice $A_t$ associata ad $F_t$ nelle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$.
2. Dire per quali valore del parametro reale $t$, $A_t$ è diagonalizzabile sui reali.
3. Calcolare autovalori e autovettori di $A_{-1}$ e di $A_{-2}$.
4. Calcolare la segnatura di ${}^tA_2 + A_2$.

**Punti (3+4+3+2)**

**Esercizio 4.** Siano $A$ e e $B$ matrici reali di ordine 3 con $A$ ortogonale e $B$ nilpotente non nulla di rango 1 *Vero o Falso*:

1. $A + B$ puòessere simmetrica definita positiva,
2. $A^2 + B^2$ è, come matrice complessa, normale .
3. $A + B$ non può essere nilpotente.

**Punti (1+1+1)**

**Corso di Algebra lineare - a.a. 2012-2013**
*Prova scritta del 15.02.2013*

Compito **B**

**Esercizio 1.** Sia $Oxyz$ un sistema di riferimento ortonormale in uno spazio euclideo di dimensione 3. Siano in esso $P_1$ e $P_2$ i punti di coordinate $(0,3,3)$ e $(4,2,1)$, $C_1$ e $C_2$ i punti di coordinate $(1,3,-2)$ e $(-3,1,4)$, $Q$ e $T$ i punti di coordinate $(-1,2,1)$ e $(2,1,1)$; inoltre, poniamo $v = {}^t(1,-2,1)$.

1. Scrivere equazioni cartesiane per la retta $r$ passante per $P_1$ e $P_2$, per le sfere $S_1$ di centro $C_1$ e raggio $\sqrt{14}$ e $S_2$ di centro $C_2$ e passante per $Q$ e per il piano $\pi$ passante per $T$ e di giacitura ortogonale a $v$.
2. Determinare le posizioni relative tra $r$ e $\pi$, tra $\pi$ e $S_1$ e tra $\pi$ e $S_2$.
3. Trovare le equazioni delle rette tangenti a $S_1$, passanti per $T$ e contenute nel piano $\pi$ (se ci sono).

**Punti (2+2+3)**

**Esercizio 2.** Dato il seguente sistema di equazioni in 4 incognite (dipendente da un parametro reale $a$)

$$\begin{cases} x+z=1 \\ -y-z+aw=0 \\ x+ay+w=0 \\ -x+2ay+w=0 \\ x+3y+z-w=0 \end{cases}$$

1. dire se per $a=0$ il sistema è risolubile e nel caso trovare le soluzioni;
2. dire se per i restanti valori di $a$ il sistema è risolubile e nel caso trovare le soluzioni.

**Punti (3+5)**

**Esercizio 3.** Si consideri l'applicazione lineare dipendente da un parametro $t \in \mathbb{R}$, $F_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, tale che
$F_t(1,1,1) = (-t, -3t+3, -2t+1)$, $F_t(1,-1,0) = (-t,-1,-3+t)$, $F_t(1,1,2) = (-t,-4t+3,-3t-1)$.

1. Trovare la matrice $A_t$ associata ad $F_t$ nelle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$.
2. Dire per quali valore del parametro reale $t$, $A_t$ è diagonalizzabile sui reali.
3. Calcolare autovalori e autovettori di $A_1$ e di $A_2$.
4. Calcolare la segnatura di ${}^tA_2 + A_2$.

**Punti (3+4+3+2)**

**Esercizio 4.** Siano $A$ e e $B$ matrici reali di ordine 3 con $A$ ortogonale e $B$ nilpotente non nulla di rango 1 *Vero o Falso*:

1. $A - B$ può essere simmetrica definita positiva,
2. $A^3 + B^2$ è, come matrice complessa, normale .
3. $A - B$ non può essere nilpotente.

**Punti (1+1+1)**

**Corso di Algebra lineare - a.a. 2012-2013**
*Prova scritta del 15.02.2013*

Compito **C**

**Esercizio 1.** Sia $Oxyz$ un sistema di riferimento ortonormale in uno spazio euclideo di dimensione 3. Siano in esso $P_1$ e $P_2$ i punti di coordinate $(0, 2, 3)$ e $(1, 3, -1)$, $C_1$ e $C_2$ i punti di coordinate $(5, 2, -2)$ e $(1, 4, 4)$, $Q$ e $T$ i punti di coordinate $(3, 3, 1)$ e $(2, -2, 1)$; inoltre, poniamo $v = {}^t(-1, 1, 3)$.

1. Scrivere equazioni cartesiane per la retta $r$ passante per $P_1$ e $P_2$, per le sfere $S_1$ di centro $C_1$ e raggio $\sqrt{14}$ e $S_2$ di centro $C_2$ e passante per $Q$ e per il piano $\pi$ passante per $T$ e di giacitura ortogonale a $v$.
2. Determinare le posizioni relative tra $r$ e $\pi$, tra $\pi$ e $S_1$ e tra $\pi$ e $S_2$.
3. Trovare le equazioni delle rette tangenti a $S_1$, passanti per $T$ e contenute nel piano $\pi$ (se ci sono).

**Punti (2+2+3)**

**Esercizio 2.** Dato il seguente sistema di equazioni in 4 incognite (dipendente da un parametro reale $a$)

$$\begin{cases} x + y + 3z + w = 0 \\ -x + -z + aw = 0 \\ y + az + w = 0 \\ -y + 2az + w = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

1. dire se per $a = 0$ il sistema è risolubile e nel caso trovare le soluzioni;
2. dire se per i restanti valori di $a$ il sistema è risolubile e nel caso trovare le soluzioni.

**Punti (3+5)**

**Esercizio 3.** Si consideri l'applicazione lineare dipendente da un parametro $t \in \mathbb{R}$, $F_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, tale che
$F_t(1, 1, 1) = (t-1, 3t, 2t-1)$, $F_t(1, -1, 0) = (t-1, -1, -2-t)$, $F_t(1, 1, 2) = (t-1, 4t-1, 3t-4)$.

1. Trovare la matrice $A_t$ associata ad $F_t$ nelle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$.
2. Dire per quali valore del parametro reale $t$, $A_t$ è diagonalizzabile sui reali.
3. Calcolare autovalori e autovettori di $A_{-2}$ e di $A_{-3}$.
4. Calcolare la segnatura di ${}^tA_2 + A_2$.

**Punti (3+4+3+2)**

**Esercizio 4.** Siano $A$ e e $B$ matrici reali di ordine 3 con $A$ ortogonale e $B$ nilpotente non nulla di rango 1 *Vero o Falso*:

1. $A + 2B$ può essere simmetrica definita positiva,
2. $A^2 - B^2$ è, come matrice complessa, normale .
3. $(A - B)^2$ può essere nulla.

**Punti (1+1+1)**

**Corso di Algebra lineare - a.a. 2012-2013**
*Prova scritta del 15.02.2013*

Compito **D**

**Esercizio 1.** Sia $Oxyz$ un sistema di riferimento ortonormale in uno spazio euclideo di dimensione 3. Siano in esso $P_1$ e $P_2$ i punti di coordinate $(2,3,0)$ e $(2,-2,-3)$, $C_1$ e $C_2$ i punti di coordinate $(3,-1,2)$ e $(5,3,0)$, $Q$ e $T$ i punti di coordinate $(4,1,1)$ e $(-1,2,2)$; inoltre, poniamo $v = {}^t(3,1,1)$.

1. Scrivere equazioni cartesiane per la retta $r$ passante per $P_1$ e $P_2$, per le sfere $S_1$ di centro $C_1$ e raggio $\sqrt{6}$ e $S_2$ di centro $C_2$ e passante per $Q$ e per il piano $\pi$ passante per $T$ e di giacitura ortogonale a $v$.
2. Determinare le posizioni relative tra $r$ e $\pi$, tra $\pi$ e $S_1$ e tra $\pi$ e $S_2$.
3. Trovare le equazioni delle rette tangenti a $S_1$, passanti per $T$ e contenute nel piano $\pi$ (se ci sono).

**Punti (2+2+3)**

**Esercizio 2.** Dato il seguente sistema di equazioni in 4 incognite (dipendente da un parametro reale $a$)

$$\begin{cases} -x-y+az=0 \\ 3x+y-z+w=0 \\ ax+z+w=0 \\ 2ax+z-w=0 \\ y+w=1 \end{cases}$$

1. dire se per $a=0$ il sistema è risolubile e nel caso trovare le soluzioni;
2. dire se per i restanti valori di $a$ il sistema è risolubile e nel caso trovare le soluzioni.

**Punti (3+5)**

**Esercizio 3.** Si consideri l'applicazione lineare dipendente da un parametro $t \in \mathbb{R}$, $F_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, tale che
$F_t(1,1,1) = (t+1, 3t+6, 2t+3)$, $F_t(1,-1,0) = (t+, -1, -4-t)$, $F_t(1,1,2) = (t+1, t+7, 3t+2)$.

1. Trovare la matrice $A_t$ associata ad $F_t$ nelle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$.
2. Dire per quali valore del parametro reale $t$, $A_t$ è diagonalizzabile sui reali.
3. Calcolare autovalori e autovettori di $A_0$ e di $A_{-1}$.
4. Calcolare la segnatura di ${}^tA_2 + A_2$.

**Punti (3+4+3+2)**

**Esercizio 4.**Siano $A$ e e $B$ matrici reali di ordine 3 con $A$ ortogonale e $B$ nilpotente non nulla di rango 1 *Vero o Falso*:

1. $A + 3B$ puè essere simmetrica definita positiva,
2. $A + iB^2$ può essere,, come matrice complessa ($i^2 = -1$), normale .
3. $(A + B)s$ non può essere nulla.

**Punti (1+1+1)**