

**Corso di Algebra lineare - a.a. 2011-2012**

*Prova scritta del 7.06.2012*

**Compito A**

**Esercizio 1.** Sia  $Oxyz$  un sistema di riferimento ortonormale in uno spazio euclideo di dimensione 3. Si consideri la retta  $r$  di equazione  $2x - 2 = 2y - 10 = 2z - 4$ .

1. Si determini un'equazione cartesiana per il piano  $\pi$  ortogonale a  $r$  e passante per il punto  $O$  di coordinate  $(0, 0, 0)$ .
2. Si calcoli la distanza del punto  $P$  di coordinate  $(1, 3, 2)$  dal piano  $\pi$ .
3. Si determini l'equazione cartesiana del piano  $\sigma$  contenente la retta  $r$  e passante per il punto  $P$ .

**Punti (2+2+2)**

**Esercizio 2.** Si consideri il seguente sistema dipendente dal parametro  $k \in \mathbb{R}$ :

$$(k^2 - 3)x_1 + 3x_2 + x_3 = k + 2$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 2$$

$$x_1 + x_3 = 1$$

1. Determinare per quali valori di  $k$  il sistema ammette una sola soluzione.
2. Determinare per quali valori di  $k$  il sistema ammette infinite soluzioni e per tali valori risolvere il sistema.

**Punti (3+4)**

**Esercizio 3.** Si consideri l'applicazione lineare dipendente da un parametro  $t \in \mathbb{R}$ ,  $F_t : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , tale che

$$F_t(1, 0, 1) = (-3t, 0, -3t), F_t(-1, -1, 0) = (2t, 0, -t), F_t(0, 0, 1) = (2t, 0, -t - 3).$$

1. Trovare la matrice  $A_t$  associata ad  $F_t$  nelle basi canoniche di  $\mathbb{R}^3$ .
2. Dire per quali valore del parametro reale  $t$ ,  $A_t$  è diagonalizzabile sui reali.
3. Calcolare autovalori e autovettori di  $A_0$ .
4. Calcolare la segnatura di  $A_2 + A_2$ .

**Punti (3+5+3+3)**

**Esercizio 4.** Sia  $A$  una matrice reale di ordine 3, avente otto delle nove entrate uguali ad 1 e una uguale a 0.

*Vero o Falso:*

1.  $A$  può essere nilpotente.
2.  $\det A = 0$
3.  $A$  è diagonalizzabile sui reali.

**Punti (1+1+1)**

**Corso di Algebra lineare - a.a. 2011-2012**

*Prova scritta del 06.07.2012*

**Compito B**

**Esercizio 1.** Sia  $Oxyz$  un sistema di riferimento ortonormale in uno spazio euclideo di dimensione 3. Si consideri la retta  $r$  di equazione  $2x - 4 = 2y - 10 = 2z - 2$ .

1. Si determini un'equazione cartesiana per il piano  $\pi$  ortogonale a  $r$  e passante per il punto  $O$  di coordinate  $(0, 0, 0)$ .
2. Si calcoli la distanza del punto  $P$  di coordinate  $(1, 3, 0)$  dal piano  $\pi$ .
3. Si determini l'equazione cartesiana del piano  $\sigma$  contenente la retta  $r$  e passante per il punto  $P$ .

**Punti (2+2+2)**

**Esercizio 2.** Si consideri il seguente sistema dipendente dal parametro  $k \in \mathbb{R}$ :

$$(4k^2 - 3)x_1 + 3x_2 + x_3 = 2k + 2$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 2$$

$$x_1 + x_3 = 1$$

1. Determinare per quali valori di  $k$  il sistema ammette una sola soluzione.
2. Determinare per quali valori di  $k$  il sistema ammette infinite soluzioni e per tali valori risolvere il sistema.

**Punti (3+4)**

**Esercizio 3.** Si consideri l'applicazione lineare dipendente da un parametro  $t \in \mathbb{R}$ ,  $F_t : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , tale che

$$F_t(1, 0, 1) = (3t, 0, 3t), F_t(-1, -1, 0) = (-2t, 0, t), F_t(0, 0, 1) = (-2t, 0, t - 3).$$

1. Trovare la matrice  $A_t$  associata ad  $F_t$  nelle basi canoniche di  $\mathbb{R}^3$ .
2. Dire per quali valore del parametro reale  $t$ ,  $A_t$  è diagonalizzabile sui reali.
3. Calcolare autovalori e autovettori di  $A_0$ .
4. Calcolare la segnatura di  $A_2 + A_2$ .

**Punti (3+5+3+3)**

**Esercizio 4.** Sia  $A$  una matrice reale di ordine 3, avente otto delle nove entrate uguali ad  $-1$  e una uguale a  $0$ .

*Vero o Falso:*

1.  $A$  può essere nilpotente.
2.  $A$  può essere invertibile.
3.  $A$  è diagonalizzabile sui reali.

**Punti (1+1+1)**