Corso di Algebra lineare - a.a. 2011-2012
Prova scritta del 7.06.2012

Compito **A**

Esercizio 1. Sia $Oxyz$ un sistema di riferimento ortonormale in uno spazio euclideo di dimensione 3. Si considerino i punti A e B di coordinate rispettivamente $(1, 0, 0)$ e $(0, 0, 1)$ e la retta r di equazione $x + y = z = 0$.

1. Si determini un'equazione cartesiana per il piano π tale che r sia parallela a π e π passi per A e B.
2. Si calcoli la distanza del punto P di coordinate $(1, 1, 1)$ dal piano π.
3. Si determini l'equazione della sfera centrata in P e tangente a π (*Una sfera si dice tangente a un piano se la loro intersezione è un punto*).

Punti (2+2+2)

Esercizio 2. Si consideri la seguente matrice:

$$A := \begin{pmatrix} -8 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & -8 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -8 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & -8 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & -8 \end{pmatrix}$$

1. Sia $v := e_2 - e_1$ dove e_1 e e_2 sono i primi due vettori della base canonica di $\mathbb{R}^{10}$. Si calcoli il vettore Av.
2. Si calcoli il determinante di A.
3. Si dia una base dell'immagine di A.

Punti (1+3+3)

Esercizio 3. Si consideri l'applicazione lineare dipendente da un parametro $t \in \mathbb{R}$, $F_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, tale che
$F_t(1, 1, 1) = (8, 0, 4t)$, $F_t(-1, -1, 0) = (-2, -t, -t)$, $F_t(1, 0, -1) = (-1, t, -t)$.

1. Trovare la matrice A_t associata ad F_t nelle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$.
2. Dire per quali valore del parametro reale t, A_t è diagonalizzabile sui reali.
3. Calcolare autovalori e autovettori di A_0.
4. Calcolare la segnatura di ${}^tA_t + A_t$.

Punti (3+5+3+3)

Esercizio 4. Sia $A \neq 0$ una matrice reale ortogonale di ordine 3, diversa dalla matrice identica I *Vero o Falso*:

1. A può essere nilpotente.
2. A^2 può essere simile ad A^3.
3. Se $A^5 = I$ allora A allora A non e' simile ad A^2.

Punti (1+1+1)

Corso di Algebra lineare - a.a. 2011-2012
Prova scritta del 01.06.2012

Compito **B**

Esercizio 1. Sia $Oxyz$ un sistema di riferimento ortonormale in uno spazio euclideo di dimensione 3. Si considerino i punti A e B di coordinate rispettivamente $(3, 0, 0)$ e $(2, 0, 1)$ e la retta r di equazione $x + y - 2 = z = 0$.

1. Si determini un'equazione cartesiana per il piano π tale che r sia parallela a π e π passi per A e B.
2. Si calcoli la distanza del punto P di coordinate $(3, 1, 1)$ dal piano π.
3. Si determini l'equazione della sfera centrata in P e tangente a π (*Una sfera si dice tangente a un piano se la loro intersezione è un punto*).

Punti (2+2+2)

Esercizio 2. Si consideri la seguente matrice:

$$A := \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

1. Sia $v := e_2 - e_1$ dove e_1 e e_2 sono i primi due vettori della base canonica di $\mathbb{R}^{10}$. Si calcoli il vettore Av.
2. Si calcoli il determinante di A.
3. Si dia una base dell'immagine di A.

Punti (1+3+3)

Esercizio 3. Si consideri l'applicazione lineare dipendente da un parametro $t \in \mathbb{R}$, $F_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, tale che
$F_t(1, 1, 1) = (4, 0, 2t)$, $F_t(-1, -1, 0) = (-2, -t, -t)$, $F_t(1, 0, -1) = (-1, t, -t)$.

1. Trovare la matrice A_t associata ad F_t nelle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$.
2. Dire per quali valore del parametro reale t, A_t è diagonalizzabile sui reali.
3. Calcolare autovalori e autovettori di A_0.
4. Calcolare la segnatura di ${}^tA_t + A_t$.

Punti (3+5+3+3)

Esercizio 4. Sia $A \neq 0$ una matrice reale ortogonale di ordine 3, diversa dalla matrice identica I *Vero o Falso*:

1. A può essere simmetrica.
2. A^3 può essere simile ad A^4.
3. Se $A^7 = I$ allora A allora A non e' simile ad A^2.

Punti (1+1+1)

Corso di Algebra lineare - a.a. 2011-2012
Prova scritta del 01.06.2012

Compito **C**

Esercizio 1. Sia $Oxyz$ un sistema di riferimento ortonormale in uno spazio euclideo di dimensione 3. Si considerino i punti A e B di coordinate rispettivamente $(0,0,3)$ e $(1,0,2)$ e la retta r di equazione $x = -y + z - 2 = 0$.

1. Si determini un'equazione cartesiana per il piano π tale che r sia parallela a π e π passi per A e B.
2. Si calcoli la distanza del punto P di coordinate $(1,-1,3)$ dal piano π.
3. Si determini l'equazione della sfera centrata in P e tangente a π (*Una sfera si dice tangente a un piano se la loro intersezione è un punto*).

Punti (2+2+2)

Esercizio 2. Si consideri la seguente matrice:

$$A := \begin{pmatrix} -12 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & -12 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & -12 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & -12 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & -12 \end{pmatrix}$$

1. Sia $v := e_2 - e_1$ dove e_1 e e_2 sono i primi due vettori della base canonica di $\mathbb{R}^{10}$. Si calcoli il vettore Av.
2. Si calcoli il determinante di A.
3. Si dia una base dell'immagine di A.

Punti (1+3+3)

Esercizio 3. Si consideri l'applicazione lineare dipendente da un parametro $t \in \mathbb{R}$, $F_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, tale che
$F_t(1,1,-1) = (0,2t,0)$, $F_t(1,1,0) = (2,t,t)$, $F_t(1,0,1) = (3,-t,t)$.

1. Trovare la matrice A_t associata ad F_t nelle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$.
2. Dire per quali valore del parametro reale t, A_t è diagonalizzabile sui reali.
3. Calcolare autovalori e autovettori di A_0.
4. Calcolare la segnatura di ${}^t\!A_t + A_t$.

Punti (3+5+3+3)

Esercizio 4. Sia $A \neq 0$ una matrice reale ortogonale di ordine 3, diversa dalla matrice identica I
Vero o Falso:

1. la traccia di A può essere 3.
2. A^2 può essere simile ad A^4.
3. Se $A^5 = I$ allora A non e' simile ad A^2.

Punti (1+1+1)

Corso di Algebra lineare - a.a. 2011-2012
Prova scritta del 01.06.2012
Compito **D**

Esercizio 1. Sia $Oxyz$ un sistema di riferimento ortonormale in uno spazio euclideo di dimensione 3. Si considerino i punti A e B di coordinate rispettivamente $(0,0,-3)$ e $(1,0,-2)$ e la retta r di equazione $x = -y - z - 2 = 0$.

1. Si determini un'equazione cartesiana per il piano π tale che r sia parallela a π e π passi per A e B.
2. Si calcoli la distanza del punto P di coordinate $(1,-1,-3)$ dal piano π.
3. Si determini l'equazione della sfera centrata in P e tangente a π (*Una sfera si dice tangente a un piano se la loro intersezione è un punto*).

Punti (2+2+2)

Esercizio 2. Si consideri la seguente matrice:

$$A := \begin{pmatrix} -15 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & -15 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & -15 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & -15 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & -15 \end{pmatrix}$$

1. Sia $v := e_2 - e_1$ dove e_1 e e_2 sono i primi due vettori della base canonica di $\mathbb{R}^{10}$. Si calcoli il vettore Av.
2. Si calcoli il determinante di A.
3. Si dia una base dell'immagine di A.

Punti (1+3+3)

Esercizio 3. Si consideri l'applicazione lineare dipendente da un parametro $t \in \mathbb{R}$, $F_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, tale che
$F_t(2,2,2) = (8,0,4t)$, $F_t(-1,-1,0) = (-2,-t,-t)$, $F_t(1,0,-1) = (-1,t,-t)$.

1. Trovare la matrice A_t associata ad F_t nelle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$.
2. Dire per quali valore del parametro reale t, A_t è diagonalizzabile sui reali.
3. Calcolare autovalori e autovettori di A_0.
4. Calcolare la segnatura di ${}^tA_t + A_t$.

Punti (3+5+3+3)

Esercizio 4. Sia $A \neq 0$ una matrice reale ortogonale di ordine 3, diversa dalla matrice identica I
Vero o Falso:

1. A può essere nilpotente.
2. A^2 può essere simile ad A^3.
3. Se $A^5 = I$ allora A allora A non e' simile ad A^2.

Punti (1+1+1)