

Programma del corso di Algebra II – a.a. 2010-11

- Richiami sulla nozione di anello. Monoidi. Anello di gruppo (o di monoide). Esempi: anelli di polinomi.
- La nozione di modulo su un anello. Omomorfismi di moduli. Esempi di moduli: gruppi abeliani, matrici quadrate, rappresentazioni di gruppi.
- Combinazioni lineari, indipendenza lineare. Generatori. Moduli ciclici. Sottomoduli. Criteri perché un sottoinsieme sia un sottomodulo. Somma e intersezione di sottomoduli. Annullatore.
- Nucleo di un omomorfismo. Modulo quoziente. Teoremi di isomorfismo per moduli. Corrispondenza tra sottomoduli di M/N e sottomoduli di M contenenti N .
- Complementi sui prodotti infiniti di insiemi. Prodotto diretto e somma diretta di moduli. Sottomodulo generato da un insieme. Moduli liberi. Ogni modulo è quoziente di uno libero. Formula di Grassmann per sottomoduli.
- Domini a ideali principali (PID). Moduli e anelli noetheriani. La noetherianità di M equivale a quella di N e M/N . Noetherianità e finita generazione. Esempi di anelli noetheriani.
- Moduli su un PID: sottomodulo di torsione e assenza di torsione nel quoziente modulo quest'ultimo. I moduli finitamente generati senza torsione su un PID sono liberi. Ogni modulo finitamente generato su un PID è somma diretta di un modulo di torsione e di uno libero.
- Decomposizione di un modulo finitamente generato di torsione su un PID associata a una fattorizzazione dell'annullatore in fattori mutuamente primi. Teorema di struttura per moduli finitamente generati su un PID. Divisori elementari. Proprietà di unicità della decomposizione in somma di moduli ciclici di un modulo finitamente generato su un PID. Applicazioni del teorema di struttura per moduli finitamente generati su un PID. Forma canonica di Jordan.
- Richiami sul coniugio e sugli automorfismi interni in un gruppo. Teorema di Cauchy per gruppi abeliani. Centro di un gruppo. Centralizzante di un elemento di un gruppo. Equazione delle classi. Il centro di un p -gruppo non è banale. I gruppi di ordine p^2 sono abeliani.
- Primo teorema di Sylow. Lateralità doppi e loro cardinalità. Secondo teorema di Sylow. Esempi di sottogruppi di Sylow. Normalizzante di un sottogruppo e numero dei p -sottogruppi di Sylow. Il terzo teorema di Sylow.
- Applicazioni dei teoremi di Sylow. Prodotto semidiretto di gruppi. Gruppo di automorfismi di un gruppo ciclico. I sottogruppi finiti del gruppo moltiplicativo di un campo sono ciclici. Gruppi di ordine pq .
- Gruppi semplici e non. Gruppi di ordine 24, 36, 56. Gruppi di ordine pqr . I gruppi di ordine < 60 non primo non sono semplici.
- Elementi primi e irriducibili in un dominio. Domini a fattorizzazione unica (UFD). Massimo comun divisore in un UFD. Polinomi primitivi e contenuto di un polinomio. Lemma di Gauss. Se A è un UFD, anche $A[X]$ è un UFD. Criteri di irriducibilità: criterio di Eisenstein e sue varianti, riduzione modulo un primo.

- Estensioni di campo. Estensioni finite. Estensioni algebriche. Grado di un'estensione.
- Costruzioni con riga e compasso.
- Campo di spezzamento di un polinomio. Estensioni normali.
- Separabilità.
- La nozione di gruppo di Galois. Campo fisso di un gruppo di automorfismi. Teorema di E. Artin sull'indipendenza di caratteri. Teorema fondamentale della teoria di Galois. Funzioni simmetriche e discriminante. Esempi di gruppi di Galois.
- Teorema dell'elemento primitivo.
- Campi finiti (cenni).
- Estensioni ciclotomiche. Discriminante delle estensioni ciclotomiche. Costruibilità del poligono con 17 lati.
- Estensioni per radicali. Risolubilità per radicali. Non risolubilità per equazioni di grado maggiore di 4.